b) x>0

soit $g(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}$; $t\geq 0$

$g'(t)=\frac{-1}{2(\sqrt{1+t})^3}$

$t\geq 0 \Rightarrow 1+t\geq 1 \Rightarrow \sqrt{1+t}\geq 1 \Rightarrow (\sqrt{1+t})^3\geq 1$

$\Rightarrow 2(\sqrt{1+t})^3\geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2(\sqrt{1+t})^3}\leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow g'(t)\geq -\frac{1}{2}$

$g'(t)\geq -\frac{1}{2}$; $\forall t\in[0,x]$

d'aprés le théorème des inégalités des accroissements finis:

$g(x)-g(0)\geq -\frac{1}{2}(x-0)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}}-1\geq -\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+t}}\geq 1-\frac{1}{2}x$

c) t>0 pour $x=\frac{1}{t^2}>0$

$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\geq 1-\frac{1}{2t^2} \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\geq 1-\frac{1}{2t^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\geq \frac{1}{t}-\frac{1}{2t^3}$

pour $t=x^2$

on aura : $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\geq \frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^6}$

$\Rightarrow f(x)\geq \frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^6}$

2) pour $t\in[100,1000]$

$\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2t^6}\leq f(t)\leq \frac{1}{t^2}$

$\Rightarrow \int_{100}^{1000}(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2t^6})dt\leq \int_{100}^{1000} f(t)dt\leq \int_{100}^{1000}\frac{1}{t^2}dt$

$\Rightarrow \left[\frac{-1}{t}+\frac{1}{10t^5}\right]_{100}^{1000}\leq I\leq \left[\frac{-1}{t}\right]_{100}^{1000}$

$10^{-2}-10^{-3}+10^{-16}-10^{-11}\leq I\leq 10^{-2}-10^{-3}$

EX 16 :

$f(x)=\frac{1}{\sin x}$; $x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

1) $f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}>0$

$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{1}{\sin x}=1$

$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{1}{\sin x}=+\infty$

f est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

elle réalise donc une bijection de $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

sur $f(\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[)=]1,+\infty[=I$

2) f est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

et $f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}\neq 0$

d'où f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$=\frac{1}{f'(y)}$ avec $y=f^{-1}(x)$, $f(y)=x$, $\frac{1}{\sin y}=x$, $\sin y=\frac{1}{x}$

$=\frac{-\sin^2 y}{\cos y}$

$y\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\rightarrow \cos y<0$

$\cos y=-\sqrt{1-\sin^2 y}=-\sqrt{1-1/x^2}$

d'où $(f^{-1})'(x)=\frac{\frac{-1}{x^2}}{-\sqrt{1-1/x^2}}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

3) $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}(f^{-1})'(t)dt=\left[f^{-1}(t)\right]_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}$

$=f^{-1}(\sqrt{2})-f^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{12}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn